1834. ANNALEN №. 12.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND XXXI.

XL. *Ueber das Elasticitätsmaafs krystallinischer Substanzen der homoëdrischen Abtheitheilung; von F. E. Neumann.*

Die Phänomene der Elasticität bei unkrystallinischen Substanzen sind von *einer*, für jede einzelne Substanz specifischen Constanten, ihrem Elasticitätsmaafs abhängig; bei krystallinischen Substanzen, und zwar bei denjenigen, bei welchen das Gesetz der innern Structurverschiedenheiten das einfachste, nämlich ein solches ist, dafs sämmtliche Cohäsionsverschiedenheiten symmetrisch vertheilt gegen drei auf einander senkrechte Ebenen sind, d. i. bei krystallinischen Substanzen der homoëdrischen Abtheilung, hängen den neuern theoretischen Untersuchungen zufolge, die Phänomene ihrer Elasticität ab von sechs untereinander unabhängigen Constanten; bei den übrigen krystallinischen Substanzen wächst mit der Unsymmetrie der Gestalten die Anzahl der Elasticitätsconstanten bis auf zwölf.

Experimentelle Untersuchungen über den numerischen Werth der Elasticitätsconstanten besitzen wir allein für unkrystallinische Substanzen, und die von verschiedenen Experimentatoren durch verschiedene Mittel erhaltenen Bestimmungen für feste Substanzen sind neuerlich, auf gemeinschaftliche Einzelnheiten reducirt, durch Lagerhielm zusammengestellt in seiner ausgezeichneten Arbeit über die Elasticität etc. des Eisens [1]). Für krystallinische Substanzen fehlen ähnliche experimentelle Untersuchungen über den Werth der Elasticitätsconstanten gänzlich, und doch wären sie gerade hier von grofsem Interesse, wenn auch durch sie zunächst nur die einzige

1) Berzelius Jahresbericht, Jahrgang 8. S. 71. (Ann. XIII. 404.)

Frage entschieden würde, ob wirklich die Anzahl der Constanten so grofs sey, als diejenige, worauf die theoretischen Untersuchungen führen, welche in Beziehung auf die Cohäsionsverschiedenheiten nichts voraussetzen, als die Symmetrie, welche durch die Gestalten gegeben ist, — oder ob unter diesen Constanten der Theorie gewisse Relationen existiren, wodurch ihre Anzahl auf eine geringere zurückgeführt würde. Für die nähere Kenntnifs der allgemeinen Natur der krystallinischen Cohäsionsverhältnisse würde diefs ein sehr wichtiger Umstand seyn. Solche experimentelle Untersuchungen sind nicht angestellt, theils weil der theoretische Zusammenhang der Elasticitätsphänomene krystallinischer Substanzen unbekannt war, also auch die Abhängigkeit derselben von den Elasticitätsconstanten, theils wegen der Befürchtung, dafs krystallinische Substanzen das Material zu dergleichen Untersuchungen nicht in der erforderlichen Ausdehnung liefern möchten.

Ich werde hier die Gesetze einiger der einfachsten Elasticitätsphänomene geben, solcher, welche am meisten geeignet scheinen, die Mittel zur Bestimmung der Elasticitätsconstanten auch bei kleinen Dimensionen der zu untersuchenden Substanz zu geben; ich werde jedoch mich hier beschränken auf solche krystallinische Substanzen, deren Gestalten durch drei rechtwinkliche Ebenen symmetrisch getheilt werden, d. i. zu der vollzähligen Abtheilung der regulären viergliedrigen, zwei- und zweigliedrigen oder sechsgliedrigen Classe gehören.

Die Durchschnitte der drei symmetrisch theilenden Ebenen, d. i. die Krystallaxen oder Elasticitätsaxen sollen mit a, b, c bezeichnet werden. Wenn ein krystallinischer Körper von beliebiger Form einem überall gleichen, gegen seine Oberfläche senkrechten Drucke: D, gemessen auf der Einheit der gedrückten Fläche, ausgesetzt wird, so findet in den drei Krystallaxen eine verschiedene Zusammenziehung statt, ihre relative Richtung

aber bleibt unverändert; ihre ursprüngliche Längen a, b, c verwandeln sich in $a(1+M)$; $b(1+N)$, $c(1+P)$. Ein Theilchen, dessen Lage in Beziehung auf einen festen Punkt im Innern durch die drei Coordinaten x, y, z, die parallel mit den Krystallaxen, vor dem Druck bestimmt war, befindet sich während des Druckes an einem Orte, dessen Coordinaten sind: $x(1-M), y(1-N), z(1-P)$. Eine gerade Linie, deren Richtung vor dem Druck durch: $\frac{x}{a}+\frac{z}{\gamma}=0$, $\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=0$ war, ist während des Druck's durch

$$\frac{x}{\alpha(1-M)}+\frac{z}{\gamma(1-P)}=0, \frac{y}{\beta(1-N)}+\frac{z}{\gamma(1-P)}=0$$

bestimmt, und die Ebene im nicht comprimirten Zustande: $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$ bekommt während des Druckes die Lage:

$$\frac{x}{\alpha(1-M)}+\frac{y}{\beta(1-N)}+\frac{z}{\gamma(1-P)}=1.$$

Hieraus lassen sich die Contractionen in den verschiedenen Richtungen berechnen, so wie die Winkelveränderungen in den Neigungen der verschiedenen Richtungen und Ebenen. Die räumliche Contraction des Körpers ist, da M, N, P immer so klein sind, dafs nur ihre ersten Potenzen zu berücksichtigen sind, ausgedruckt durch: $M+N+P$. Bei unkrystallinischen Substanzen, so wie bei denjenigen, welche das reguläre Krystallsystem haben, ist $M=N=P$, bei den Substanzen des viergliedrigen oder sechsgliedrigen Systems sind zwei dieser Gröfsen unter sich gleich. Ich werde M, N, P die *Verkürzungen bei gleichem Druck nennen*; es sind wirkliche Verkürzungen, wenn sie negativ sind, aber Verlängerungen, wenn sie positiv sind. Es ist möglich, dafs die *Verkürzungen* bei gleichem Druck verschiedenen Vorzeichens sind, so dafs bei gleichem, von aufsen nach innen senkrecht wirkendem Druck, Verlängerungen in einigen Richtungen, Verkürzungen in andern eintreten, während gewisse Richtungen unverändert bleiben; ein

solches Verhalten ist bei einigen krystallinischen Substanzen sogar mit grofser Wahrscheinlichkeit zu vermuthen, weil es scheint, dafs die Gröfsen M, N, P unter einander in demselben Verhältnifs stehen müssen, wie die ungleichen Ausdehnungen in den drei Krystallaxen, welche durch eine Temperatur-Erhöhung hervorgebracht werden.

Die Verkürzungen bei gleichem Druck M, N, P hängen von andern Gröfsen ab, welche als die Elasticitäts-Constanten können angesehen werden, und von denen folgende Betrachtung eine anschauliche Vorstellung giebt. Man denke sich ein gerades rechtwinkliches Prisma aus einer krystallinischen Substanz geschnitten, dessen Kanten parallel den Krystallaxen sind, und bezeichne die gegen die Axe a senkrechten Seiten durch A, und die andern Seiten, welche senkrecht gegen b und c sind, mit B und C. Man comprimire dieses Prisma durch einen gegen die Seiten A senkrechten Druck: D, gemessen auf der Einheit der Fläche, während die Seiten B und C frei sind; es entsteht eine Verkürzung in der Richtung der Axe a, und zugleich treten Verkürzungen (oder Verlängerungen) in den Axen b und c ein, unter einander verschieden im Allgemeinen, und verschieden von der Verkürzung in der Axe a. Ich werde diese drei Gröfsen, nämlich die Verkürzung in a und die Verkürzung in b und c bezeichnen mit

$$M_a D, \; N_a D, \; P_a D.$$

Wenn der Druck senkrecht gegen die Seiten B gerichtet ist, so sollen die in a, b, c entstehenden Verkürzungen (oder Verlängerungen) bezeichnet werden mit:

$$M_b D, \; N_b D, \; P_b D,$$

und wenn die Compression in der Richtung der Axe c Statt findet, mit:

$$M_c D, \; N_c D, \; P_c D.$$

Der Werth der Gröfsen M_a, N_a, P_a ist derselbe, wenn statt des betrachteten geraden rechtwinklichen Prisma's ir-

gend ein gerader prismatischer Körper, dessen Grundflächen senkrecht auf a, und dessen Seiten entweder Ebenen parallel mit a sind, oder Theile von Cylinderflächen, deren Axen parallel mit a sind, in der Richtung der Axe a durch einen auf A senkrechten Druck comprimirt wird. Dasselbe gilt von den Gröfsen M_b, N_b P_b und den Gröfsen M_c, N_c, P_c, welche denselben Werth haben, wenn statt des geraden rechtwinklichen Prisma's prismatische Körper, deren Axen parallel mit b und mit c, in der Richtung ihrer Axen comprimirt werden.

Durch die neun Gröfsen M_a... M_b.. M_c.. sind die linearen Contractionen bei gleichem Druck, M, N, P, auf folgende Weise bestimmt:

(1) $$M = M_a + M_b + M_c$$
$$N = N_a + N_b + N_c$$
$$P = P_a + P_b + P_c$$

Die neun Gröfsen M_a..., M_b..., M_c... können als die Elasticitäts-Constanten angesehen werden; ihre Anzahl reducirt sich aber mittelst des folgenden Theorem's auf sechs.

Die Verlängerung der Krystallaxe b, welche entsteht, wenn ein grader prismatischer Körper, dessen Axe parallel mit a, in der Richtung seiner Axe comprimirt wird, ist gleich der Verlängerung, welche a erfährt, wenn ein prismatischer Körper, dessen Axe parallel mit b in der Richtung von b comprimirt wird; dasselbe gilt von je zwei der Krystallaxen. Es ist also:

(2) $$M_b = N_a,\ M_c = P_a,\ N_c = P_b.$$

Mittelst dieses Theorems ersieht man leicht aus (1), dafs die Verkürzung M der Axe a bei gleichem, gegen die ganze Oberfläche senkrechten Druck D, gleich ist der räumlichen Contraction, welche das vorher betrachtete gerade rechtwinkliche Prisma erfährt, wenn derselbe Druck D, immer gemessen auf der Einheit der Fläche, allein gegen die Seiten A wirkt; dasselbe gilt in Bezie-

hung auf die Axe b und die Seiten B, und in Beziehung auf die Axe c und die Seiten C. Es ist:

$$(3)\qquad \begin{aligned} M &= M_a + N_a + P_a \\ N &= M_b + N_b + P_b \\ P &= M_c + N_c + P_c. \end{aligned}$$

Wenn die Gröfsen M, N, P verschiedenen Vorzeichens sind, so wird durch eine Compression des geraden rechtwinklichen Prisma in der Richtung einer der Krystallaxen eine Verkleinerung seines Volumens, in der Richtung einer andern Krystallaxe eine Vergröfserung seines Volumens hervorgebracht.

Die theoretischen Untersuchungen der Elasticität lassen diese Kraft entstehen aus den anziehenden und abstofsenden Kräften, welche auf ein Theilchen von seinen umgebenden Theilchen ausgeübt werden, deren Intensität zwischen je zwei Theilchen derselben Richtung proportional ist der Veränderung, welche ihre ursprüngliche Entfernung erlitten hat, und äufserst schnell mit dieser Entfernung selbst abnimmt. Die auf dieser Ansicht basirte theoretische Untersuchung führt für die krystallinischen Substanzen der homoëdrischen Abtheilung auf gewisse Constanten, welche ich in meiner Abhandlung über die doppelte Strahlenbrechung [1]) bezeichnet habe mit A, $A_{\prime}$, $A_{\prime\prime}$, B, C, D. Diese theoretischen Elasticitäts-Constanten hangen mit den durch M_a.. M_b.. M_c... bezeichneten Gröfsen durch folgende lineare Relationen zusammen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} -1 &= D M_a + A_{\prime\prime} N_a + A P_a \\ 0 &= A_{\prime\prime} M_a + C N_a + A_{\prime} P_a \\ 0 &= A M_a + A_{\prime} N_a + B P_a \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} 0 &= D M_b + A_{\prime\prime} N_b + A P_b \\ -1 &= A_{\prime\prime} M_b + C N_b + A_{\prime} P_b \\ 0 &= A M_b + A_{\prime} N_b + B P_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= D M_c + A_{\prime\prime} N_c + A P_c \\ 0 &= A_{\prime\prime} M_c + C N_c + A_{\prime} P_c \\ -1 &= A M_c + A_{\prime} N_c + B P_c. \end{aligned}$$

Man hat also, wenn $T = BCD + 2AA_{\prime}A_{\prime\prime} - BA_{\prime\prime}^2 - CA^2 - DA_{\prime}^2$ gesetzt wird:

1) Poggendorff'r Annal. Bd. XXV. S. 424.

$$M_a = -\frac{BC - A_{\prime}^2}{T} \qquad M_b = N_a = -\frac{AA_{\prime} - BA_{\prime\prime}}{T}$$

$$N_b = -\frac{DB - A^2}{T} \qquad M_c = P_a = -\frac{A_{\prime}A_{\prime\prime} - CA}{T}$$

$$P_c = -\frac{CD - A_{\prime\prime}^2}{T} \qquad N_c = P_b = -\frac{AA_{\prime\prime} - DA_{\prime}}{T}$$

Will man diese Ausdrücke auf unkrystallinische Substanzen anwenden, so hat man, wie anderswo gezeigt ist [1]) $A = A_{\prime} = A_{\prime\prime} = \frac{1}{3}B = \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}D = L$ zu setzen, und man erhält:

$$M_a = N_c = P_c = -\tfrac{2}{5}\frac{1}{L}\ ;\ M_b = N_a = M_c = \ldots = \tfrac{1}{10}\frac{1}{L}.$$

Das schöne von **Poisson** gegebene Theorem über die Dehnung elastischer Drähte, dafs bei einer bestimmten Verlängerung derselbe δ in den Queerdimensionen eine Verkürzung $\frac{1}{4}\delta$ eintritt, ist also unabhängig von den Dimensionen, und gilt von jedem geraden prismatischen Körper, wie grofs seine Queerdimensionen gegen die Längendimension auch seyen. Dasselbe gilt von dem ähnlichen Theorem, welches er in Beziehung auf dünne elastische Bleche gegeben hat, es gilt für jeden geraden prismatischen Körper.

Wenn irgend ein Körper von homogener Substanz, durch äufserlich angebrachte Druckkräfte auf eine beliebige Weise, jedoch so comprimirt wird, dafs keine Biegung eintreten kann, d. h., dafs alle Theile, welche ursprünglich in einer geraden Linie lagen, auch während der Compression in einer solchen liegen, so giebt es immer drei auf einander rechtwinkliche Richtungen, in welchen die gröfsten und kleinsten Verkürzungen statt gefunden haben, und deren relative Richtung unverändert geblieben ist. Dieser Satz ist unabhängig von den Cohäsionsverschiedenheiten. Die drei rechtwinklichen Richtungen heifsen: die *Druckaxen*; sie heifsen die *Haupt-Druckaxen*, wenn die Compression durch einen überall

1) Poggendorff's Annal. Bd. XXV. S. 425.

gleichen, gegen die Oberfläche senkrechten Druck hervorgebracht ist. Die Haupt-Druckaxen fallen bei den krystallinischen Substanzen der homoëdrischen Abtheilung mit den Krystallaxen oder Elasticitätsaxen zusammen, bei denjenigen Substanzen, deren Krystallformen zu den hemiëdrischen gehören, ist die Lage der Haupt-Druckaxen von dem Gesetz der Cohäsionsverschiedenheiten abhängig, und in Beziehung auf dieses Gesetz ein sehr wichtiger Umstand.

Wenn die Lage der Druckaxen gegeben ist, und ihre Verlängerungen (oder Verkürzungen) μ, ν, ω, sehr klein ist, so dafs nur die ersten Potenzen derselben zu berücksichtigen sind, so lassen sich die Verlängerungen jeder andern Richtung durch folgende Construction bestimmen. Man beschreibe eine Kugel mit dem Halbmesser 1, und um ihren Mittelpunkt die von Fresnel so genannte Elasticitätsfläche: $\varrho^2 = (1+\mu)^2\alpha^2 + (1+\nu)^2\beta^2 + (1+\omega)^2\gamma^2$, wo ϱ der Radius vector, und α, β, γ die Cosinusse der Winkel sind, welche dieser mit den drei Druckaxen bildet, in denen die Verlängerungen μ, ν, ω sind. Das Stück dieses Radius vector, welches von der Kugelfläche und der Elasticitätsfläche abgeschnitten wird, ist die seiner Richtung entsprechende Verkürzung oder Verlängerung, je nachdem es innerhalb oder aufserhalb der Kugel liegt. Bezeichnet man diese Verkürzung in der Richtung des Radius vector ϱ mit $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$, so hat man

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = \mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \omega\gamma^2.$$

In jeder Ebene giebt es immer zwei auf einander senkrechte Richtungen, in welchen die gröfste und kleinste Verkürzung unter allen in dieser Ebene liegenden Richtungen statt gefunden hat, und deren relative Richtung unverändert geblieben ist. Zwei Ebenen giebt es immer, wenn alle drei Gröfsen μ, ν, ω verschieden sind, in welchen alle Richtungen eine gleich grofse Verkürzung er-

litten haben, es sind diefs die beiden Kreisschnitte der Elasticitätsfläche.

Den einfachsten Ausdruck für die Winkelveränderung, welche in der Neigung zweier Ebenen durch die Compression hervorgebracht ist, erhält man, wenn die Lage dieser Flächen bezogen wird auf die Richtung der gröfsten oder kleinsten Verkürzung aller in der Ebene liegenden Richtungen, die senkrecht auf den beiden Ebenen steht, deren Winkelveränderung gefunden werden soll, d. i., in der krystallographischen Terminologie, auf den Richtungen der gröfsten und kleinsten Verkürzungen ihrer *Zonen-Ebene*. Es seyen μ' und μ'' diese gröfsten und kleinsten Verkürzungen, und es seyen die Ebenen deren Winkelveränderungen bestimmt werden sollen gegen die Richtung, welcher die Verkürzung μ'' entspricht, geneigt unter V' und V'', so dafs ihre Neigung unter einander ist $V'-V''$. Die Veränderung, welche dieser Winkel $V'-V''$ durch die Compression erleidet, werde mit ΔV bezeichnet, dann hat man:

(5) $\Delta V=[\mu'-\mu'']\,sin\,(V'-V'')\,cos\,(V'+V'')$

Die gröfste Winkelveränderung unter allen Ebenen derselben Zone (d. i. unter allen, deren Normalen in einer Ebene liegen) tritt ein, wenn der Factor von $(\mu'-\mu'')$ gleich 1 ist, d. i. wenn $V'=-V''=45^{\circ}$. Die gröfste Winkelveränderung tritt also ein bei demjenigen *rechtwinklichen* Flächenpaare, welches symmetrisch gegen die Richtungen der gröfsten und kleinsten Verkürzungen der Zonen-Ebene liegt. Diese gröfste Winkelveränderung ist $\mu'-\mu''$; die absolut gröfste Winkelveränderung findet also statt bei denjenigen beiden rechtwinklichen Flächen, welche gegen die gröfste und kleinste Axe der Elasticitätsfläche, durch welche die Verkürzungen der einzelnen Richtungen construirt sind, unter 45° geneigt sind. Es giebt zwei Ebenen, welche die Eigenschaft haben, dafs alle gegen sie senkrecht geneigten Ebenen ihre Neigungen unter einander unverändert erhalten, es sind dies

die beiden Kreisschnitte der Elasticitätsfläche. — Allgemein bleibt die rechtwinkliche Neigung der beiden Ebenen unverändert, welche parallel der beiden Richtungen der gröfsten und kleinsten Verkürzung ihrer Zonen-Ebene sind; unverändert erhalten ihre Neigungen alle Flächen derselben Zone, für welche $V' + V'' = 90°$ ist.

Es werde die Lage der Theilchen irgend eines Körpers auf drei gegen einander rechtwinkliche Coordinaten x, y, z bezogen, und dieser werde einem beliebigen Druck unterworfen, jedoch so, dafs keine Biegung entsteht, wodurch kleine Verrückungen der Theilchen hervorgebracht werden, deren erste Potenzen nur zu berücksichtigen seyen: die Verkürzungen in der Richtung der Coordinaten x, y, z werden mit M, N, P bezeichnet; die Coordinaten sind während des Druckes nicht mehr rechtwinklich gegen einander geneigt; es werde der Cosinus des Winkels, den die Richtungen x, y während des Druckes mit einander leiden, durch p bezeichnet, d. i. $\cos(x, y) = p$ und eben so sey $\cos(x, z) = n$ und $\cos(y, z) = m$. Alsdann hat man für die Verkürzung $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$ der Richtung ϱ, welche mit den Coordinaten Axen x, y, z die Winkel bildete, deren Cosinusse α, β, γ sind:

$$(6) \qquad \frac{\Delta\varrho}{\varrho} = M\alpha^2 + N\beta^2 + P\gamma^2 + p\alpha\beta + n\alpha\gamma + m\beta\gamma.$$

Hieraus lassen sich diejenigen drei rechtwinklichen Richtungen, d. i. die Druckaxen, bestimmen, in welchen die Verkürzungen gröfste oder kleinste sind: ihre Lage hängt ab von einer cubischen Gleichung, welche lauter mögliche Wurzeln hat. Verbindet man mit (6) noch die Bedingung, dafs sämmtliche ϱ senkrecht auf einer Richtung stehen sollen, welche durch die Cosinusse A, B, C ihrer Neigung gegen die drei Coordinaten x, y, z bestimmt ist,

das ist:

(7) $$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

und sucht diejenigen Werthe von α, β, γ, welche (7) genügen und für $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$ in (6) ein Maximum geben, so wird man auf eine quadratische Gleichung geführt mit immer möglichen Wurzeln, wodurch die beiden aufeinander rechtwinklichen Richtungen der gröfsten und kleinsten Verkürzung in der Ebene $Ax + By + Cz = 0$ bestimmt werden.

Die Winkelveränderung der Neigung zweier Ebenen kann man direct durch die Gröfsen M, N, P, m, n, p, bestimmen. Es seyen die gegebenen Ebenen, deren Winkelveränderung gefunden werden soll:

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 \; ; \; \frac{x}{A'} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{C'} = 1.$$

Ihre Lage während des comprimirten Zustandes ist:

$$\frac{(x)}{A(1+M)} + \frac{(y)}{B(1+N)} + \frac{(z)}{C(1+P)} = 1 \; ;$$

$$\frac{(x)}{A'(1+M)} + \frac{(y)}{B'(1+N)} + \frac{(z)}{C'(1+P)} = 1.$$

wo sich (x), (y), (z) auf dasjenige schiefwinklige Coordinatensystem beziehen, in welches das rechtwinkliche x, y, z durch den Druck verwandelt worden ist; die Neigung der schiefwinkligen Coordinaten (x), (y), (z) ist bestimmt durch die Cosinusse m, n, p. Diefs reicht hin, die Neigung der Ebenen in ihrem verrückten Zustande zu berechnen, und also die erlittene Neigungsveränderung zu bestimmen.

Ich werde jetzt die Werthe der Gröfsen M, N, P, m, n, p, ausgedrückt durch die Elasticitäts-Constanten in einigen der einfachsten Fälle für solche krystallinische Substanzen geben, deren Gestalten durch drei rechtwinkliche Ebenen symmetrisch getheilt werden. Aus einer solchen Substanz werde ein grader prismatischer Körper geschnitten, dessen Grundflächen senkrecht stehn auf einer Li-

nie, deren Neigung gegen die drei Krystallaxen a, b, c bestimmt sey durch die Cosinusse C_a, C_b, C_c; diefs ist die Axe des Prismas, die Seiten desselben sind entweder Ebenen parallel mit der Axe, oder Theile von Cylinderflächen, deren Axen parallel mit der Axe des Prisma sind. Dieses Prisma werde, durch den Druck $= D$, gemessen auf der Einheit der Fläche, die senkrecht auf die Grundflächen gerichtet ist, comprimirt, während die Seiten desselben frei sind. Die Wirkung dieser Compression ist im Allgemeinen eine doppelte, die Krystallaxen werden verkürzt, und zugleich aus ihren gegeneinander rechtwinkligen Neigungen abgelenkt. Man erhält für die Verkürzung der Krystallaxen a, b, c:

$$(7)\qquad \begin{aligned} M &= D\left\{M_a C_a^2 + M_b C_b^2 + M_c C_c^2\right\} \\ N &= D\left\{N_a C_a^2 + N_b C_b^2 + N_c C_c^2\right\} \\ P &= D\left\{P_a C_a^2 + P_b C_b^2 + P_c C_c^2\right\} \end{aligned}$$

und für die Neigung der Krystallaxen unter einander während der Compression:

$$(8)\qquad \begin{aligned} m &= D\frac{C_b C_c}{A_{,}} \\ n &= D\frac{C_a C_c}{A} \\ p &= D\frac{C_a C_b}{A_{,,}} \end{aligned}$$

wo A, $A_{,}$, $A_{,,}$ die in den Gleichungen (4) gebrauchte Bedeutung haben.

Wenn man einen geraden prismatischen Körper von einer unkrystallinischen Substanz durch den Druck D, gemessen auf der Einheit der Fläche, senkrecht gegen die Grundflächen, comprimirt, so ist der Quotient der Verkürzung der Axe durch den Druck D diejenige Gröfse, welche man mit dem Namen: *das Elasticitätsmaafs* belegt; es werde mit E bezeichnet. Dieselbe Definition des Elasticitätsmaafses kann man übertragen auf krystallinische Substanzen; hier ist aber dieses Maafs verschieden, je nachdem die Axe des Prisma eine andere

Richtung in Beziehung auf die Krystallaxen hat. Ich werde mit E_e das Elasticitätsmaafs für ein Prisma bezeichnen, dessen Axe gegen die Krystallaxen unter Winkel geneigt ist, deren Cosinusse C_a, C_b, C_e sind, oder: *E_e ist das Elasticitätsmaafs der durch C_a, C_b, C_e bestimmten Richtung.* Es ist $E_e = \frac{\Delta\varrho}{\varrho D}$, wo statt $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$ sein Werth aus (6) zu setzen ist, und in diesem die Werthe von $M \ldots m \ldots$ aus (7) u. (8). Man erhält auf diesem Wege

$$E_e = M_a C_a^4 + N_b C_b^4 + P_c C_e^4 + 2\left(N_a + \frac{1}{2A_{\prime\prime}}\right) C_a^2 C_b^2$$
$$+ 2\left(P_a + \frac{1}{2A}\right) C_a^2 C_e^2 + 2\left(P_b + \frac{1}{2A_{\prime}}\right) C_b^2 C_e^2.$$

Um das Elasticitätsmaafs einer jeden Richtung zu kennen, mufs dasselbe für sechs verschiedene Richtungen gegeben seyn. Von denjenigen Methoden, deren man sich bei unkrystallinischen Substanzen bedient hat, um ihre Elasticitätsmaafse zu bestimmen, scheint die *Methode der Biegung* vorzugsweise auf krystallinische Substanzen anwendbar. Diese Methode besteht darin, dafs ein dünner, gerader, prismatischer Stab an seinem einen Ende horizontal festgemacht, und das andere Ende mit Gewichten beschwert wird — oder dafs dieser Stab mit beiden Enden auf eine horizontale Unterlage gelegt wird, und seine Mitte mit Gewichten beschwert wird — und man die Depression, um welche der mit Gewichten beschwerte Querschnitt des Stabes herunter gezogen wird, beobachtet.

Es werde dieses Verfahren angewandt auf ein dünnes, rechtwinkliches Stäbchen, welches aus einer krystallinischen Substanz geschnitten ist, und dessen Axe in Beziehung auf die Krystallaxen durch die Cosinusse C_a, C_b, C_e bestimmt sey. Die Depression des mit Gewichten belasteten Querschnitts hängt aufser von den Dimensionen des Stäbchen, von dem der durch C_a, C_b, C_e bestimmten Richtung angehörigen Elasticitätsmasse ab.

Es seyen H und B die Seiten des rechtwinklichen Querschnittes, und $J = HB$ sein Flächeninhalt, L die Entfernung des festen Endes von dem belasteten Querschnitt (oder 2 L die Entfernung der beiden horizontalen Unterlagen der Enden, wenn das Stäbchen in der Mitte belastet wird), E_c das Elasticitätsmaaſs der Richtung der Axe des Stäbchens, G die beschwerenden Gewichte, V_b die Depression des beschwerten Querschnittes in dem Falle, wenn die Seite B in einer verticalen Ebene liegt, und V_h, wenn die Seite H in der verticalen Ebene gelegt ist, alsdann hat man, wenn nur das eine Ende fest ist, und das andere Ende von den Gewichten heruntergezogen wird:

$$V_b = \frac{4 E_c G L^3}{J B^2}, \quad V_h = \frac{4 E_c G L^3}{J H^2}.$$

Ist aber das Gewicht in der Mitte angebracht, und ruhen die beiden Enden auf einer horizontalen Unterlage, so sind V_b V_h nur halb so groſs. — Diese Methode der Biegung läſst sich mit sehr kleinen Stäbchen ausführen, da die Vergröſserung der zu beobachtenden Gröſse V allein von dem Verhältniſs der Längendimension zu den Querdimensionen abhängig ist. Um mittelst dieser Methode die Elasticitätsconstanten einer krystallinischen Substanz zu bestimmen, muſs man aus ihr 6 Stäbchen in sechs verschiedenen Richtungen schneiden, und ihre Elasticitätsmaaſse bestimmen. Am einfachsten bieten sich hierzu dar die drei Richtungen der Krystallaxen, und die drei Richtungen, welche gegen je zwei Krystallaxen unter 45° geneigt sind. Bezeichnet man mit $E_{(a)}$, $E_{(b)}$, $E_{(c)}$ das Elasticitätsmaaſs der drei Krystallaxen, und mit $E_{(a,b)}$ das Elasticitätsmaaſs der mittlern Richtung, welche gegen a und b unter 45° geneigt ist, und mit $E_{(a,c)}$ und $E_{(b,c)}$ die Elasticitätsmaaſse der mittleren Richtungen zwischen a, c und zwischen b, c, so findet man:

$$E_{(a)}=M_a \quad E_{(a,b)}=M_a+N_b+2N_a+\frac{1}{A_{\prime\prime}}$$

$$E_{(b)}=N_b \quad E_{(a,c)}=M_a+P_c+2P_a+\frac{1}{A}$$

$$E_{(c)}=P_c \quad E_{(b,c)}=N_b+P_c+2P_b+\frac{1}{A_\prime},$$

woraus sämmtliche Elasticitätsconstanten berechnet werden können.

Beobachtungen der Winkelveränderungen, welche in den Neigungen der Seiten unter einander oder gegen die Basis an einem geraden Prisma hervorgebracht werden, wenn dieſs in der Richtung der Axe comprimirt wird, scheinen ein zweites Mittel darzubieten, die Elasticitätsconstanten der krystallinischen Substanzen zu bestimmen. Durch diese Methode können aber immer nur die Differenzen dieser Constanten gefunden werden, so daſs *eine* Beobachtung nach der Biegungsmethode immer nothwendig bleibt. Schneidet man ein Prisma so daſs seine Grundflächen senkrecht auf a stehen, und seine Seitenebenen parallel mit a, gegen b und c unter 45° geneigt sind, comprimirt es in der Richtung seiner Axe, und bezeichnet die Winkelveränderung des Kantenwinkels, welcher von der durch a und b gelegten Ebene halbirt wird mit ΔA_b, so ist:

$$\Delta A_b=(P_a-N_a)D,$$

wo D der comprimirende Druck ist. In einem andern Prisma, dessen Axe parallel mit b, und dessen Seiten gegen a und c unter 45° geneigt sind, werde die durch Compression des Prisma in Richtung seiner Axe hervorgebrachte Winkelveränderung der Kante, welche in der durch b und c gelegten Ebene liegt, durch ΔB_c, und in einem dritten Prisma, dessen Axe parallel mit c, und dessen Seiten gegen a und b unter 45° geneigt sind, werde die durch Compression entstehende Winkelveränderung der Kante in der Ebene durch c und a mit, ΔC_a bezeichnet, dann ist:

$$\Delta B_c = (M_b - P_b) D$$
$$\Delta C_a = (N_c - M_c) D$$

Man sieht, dafs $\Delta A_b + \Delta B_c + \Delta C_a = 0$, und dafs zwei dieser Prismen die Unterschiede von M_b, M_c, N_c bestimmen. Dieselben beiden Prisma reichen auch hin, die Unterschiede von M_a, N_b, P_c zu bestimmen, wenn sie nicht in der Richtung der Axe, sondern in der Richtung der Normale zweier gegenüberstehender Seiten comprimirt werden. Ich werde die bei dieser Art Compression entstehenden Winkelveränderungen derselben Kanten, die bei der ersten Art der Compression betrachtet sind, bezeichnen mit (ΔA_b), (ΔB_c), (ΔC_a); alsdann hat man

$$(\Delta A_b) = \tfrac{1}{2}(N_b - P_c) D$$
$$(\Delta B_c) = \tfrac{1}{2}(P_c - M_a) D$$
$$(\Delta C_a) = \tfrac{1}{2}(M_a - N_b) D$$

und also auch hier: $(\Delta A_b) + (\Delta B_c) + (\Delta C_a) = 0$.

Schneidet man ein gerades rechtwinkliches Prisma, dessen Axe nicht parallel mit einer der Krystallaxen, sondern z. B. parallel mit einer Linie, die gegen zwei der Axen unter 45° geneigt sind, so läfst sich aus den Winkelveränderungen desselben durch Compression eine Differenz zwischen den Gröfsen M_a, N_b, P_c und M_b, M_c N_c bestimmen, wodurch alsdann sämmtliche Unterschiede der Elasticitätsconstanten gefunden sind.

Aus dem was hier für den allgemeinsten Fall, wo alle drei Krystallaxen verschieden sind, gesagt ist, ist es leicht, die besonderen Fälle abzuleiten, wenn die krystallinischen Substanzen zum viergliedrigen System oder sechsgliedrigen gehören, welche Fälle, wenn hier c die Axe dieser Systeme bedeutet, durch $A = A_{,}$ und $C = D$ charakterisirt sind, so wie den besondern Fall des regulären Systems, wo $A = A_{,} = A_{,,}$ und $B = C = D$ ist, dessen Untersuchung merkwürdige Unterschiede der Elasticität unkrystallinischer Substanzen und derjenigen krystallinischen, die zum regulären System gehören, darbietet.